Fonctions Holomorphes et Séries Entières

Exercice 1 (Un phénomène d'extension) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et S un ensemble discret dans Ω. Soit f une fonction continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega \setminus S$. Montrer que f est holomorphe sur Ω. *Indication : utiliser la formule de Cauchy pour un disque épointé de la forme* $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < A\}$.

Solution :
Soit $z_0 \in S$, Montrons que f est holomorphe sur un disque centrée en z_0.
Soit $D(z_0, r_0) \in \Omega$, tel que z_0 soit le seul élément de S sur ce disque.
Soit $z \in D(z_0, r_0) \setminus \{z_0\}$ et $r < r_0$. Par la formule intégrale de Cauchy, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})re^{it}}{z_0 + re^{it} - z} \mathrm{d}t$$

Puis, par continuité de f sur le compact $D(z_0, r_0)$, On peut passer à la limite sous le signe intégrale et :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})re^{it} \mathrm{d}t$$

d'où l'holomorphie de f en z_0.
On aurait pu aussi remarquer que f est égale à sa transformé de Cauchy sur le disque et conclure avec le cours.

Exercice 2 (Principe d'équivalence Taylor/Fourier) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\overline{D(z_0, r)}$ un disque fermé contenu dans Ω. Montrer que pour tout $f \in O(\Omega)$ et tout entier $n \geq 0$, on a

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta.$$

Solution :
Pour tout $z \in D(z_0, r_0)$, on a : $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(re^{i\theta})^k e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \int_0^{2\pi} r^k e^{ik\theta} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} r^k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i\theta(k-n)}\mathrm{d}\theta}_{=2\pi \ si \ n=k, \ 0 \ sinon} \\
&= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} r^n 2\pi
\end{aligned}$$

Exercice 3 Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, montrer que $O(\Omega)$ est un anneau intègre.

Solution :
Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω non nulles.
On pose $Z(f) := \{z \in \Omega; f(z) = 0\}$ et $Z(g) := \{z \in \Omega; g(z) = 0\}$.
Alors, $Z(f)$ et $Z(g)$ sont des ensembles discrets par le principe des zéros isolés, et comme $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$ reste discret, $fg \not\equiv 0$ sur Ω.

Exercice 4 (Points singuliers d'une série entière) Dans tout l'exercice, on désigne par S une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence égal à 1. On note $f(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ la somme de cette série sur le disque unité D. On dit que $\eta \in bD$ est un *point régulier* de S s'il existe un disque ouvert $D(\eta, r)$ et une fonction holomorphe φ sur ce disque qui prolonge f, c'est-à-dire telle que $f = \varphi$ sur $D \cap D(\eta, r)$. Un point de bD qui n'est pas régulier est dit *singulier*. On note $\mathrm{Sing}(S)$ l'ensemble des points singuliers de S.

1. Déterminer $\mathrm{Sing}(S)$ lorsque $S = \sum_{n\geq 0} z^n$ et $S = \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n$.
2. Montrer que $\mathrm{Sing}(S)$ n'est jamais vide.
3. Est-il vrai que si $\sum_{n\geq 0} a_n \eta^n$ converge (resp. diverge) pour $\eta \in bD$, alors $\eta \notin \mathrm{Sing}(S)$ (resp. $\eta \in \mathrm{Sing}(S)$) ?

Solution :
Q.1 : Soit $S_1 = \sum_{n\geq 0} z^n$, alors S converge sur le disque unité et pour tout z tels que $|z| < 1$, on a : $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Donc, Sing$(S_1) = \{1\}$.
Soit $S_2 = \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n$, alors S converge sur le disque unité et pour tout z tels que $|z| < 1$, on a : $f(z) = \frac{1}{1+z}$. Donc, Sing$(S_2) = \{-1\}$.

Q.2 : Montrons que Sing(S) est non vide. Supposons par l'absurde qu'il le soit. Alors, pour tout $\eta \in b\Omega$, il existe $r_\eta > 0$ et $f_\eta \in O(D(\eta, r_\eta)$ tels que $f = f_\eta$ sur $D \cap D(\eta, r_\eta)$.
Le bord du disque étant un compact de $\mathbb{C}$, il existe $\eta_1, \ldots, \eta_n \in bD$ et $r_1, \ldots, r_n > 0$ tels

qu'il existe un prolongement holomorphe f_j de f sur $D(\eta_j, r_j)$ pour tout $1 < j < n$.
Et en outre, il existe $1 < R < +\infty$ tel que

$$D(0, R) \subset D \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} D(\eta_j, r_j) \right)$$

Enfin, remarquons que si $I_{j,k} := D(\eta_j, r_j) \cap D(\eta_k, r_k) \neq \varnothing$ Alors $f_j = f_k$ sur $I_{j,k}$ puisque $(f_j - f_k) \in O(I_{j,k})$ et que $f_j - f_k = 0$ sur $D \cap I_{j,k}$ donc, pas le principe des zéros isolés, comme $I_{j,k}$ est connexe, on a $f_j - f_k = 0$ sur $I_{j,k}$.
On peut alors définir $\phi \in O(D(0, R))$ par : $\phi = f$ sur D et $\phi = f_j$ sur $D \cap D(\eta_j, r_j)$.
Et, par holomorphie de ϕ, pour tout $z \in D(0, R)$ on a :

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

qui admet un rayon de convergence au moins égal à R, donc strictement supérieur à 1.
Or,

$$b_n = \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$$

Donc, S aurait un rayon de convergence strictement supérieur à 1 : Absurde ↯

Q.3 : Ni l'une, ni l'autre des deux propositions n'est vraie. En effet, si on prend S_1 définie en Q.1, -1 est un point régulier mais $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ diverge.
Pour l'autre proposition, on peut regarder $ln(1+z) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ qui converge en -1 par le critère des séries alternées, mais qui ne peut pas se voir prolongées holomorphiquement en un voisinage de -1.

Exercice 5 (Séries entières à coefficients positifs) Le but est de montrer que si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est de rayon de convergence égal à 1 et si tous les a_n sont réels positifs ou nuls, alors $1 \in \mathrm{Sing}(S)$. L'idée est de considérer la série de Taylor $g(z) := \sum_{p\geq 0} \frac{f^{(p)}(1/2)}{p!}(z - 1/2)^p$ où $f(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

1. Montrer que la série définissant g a un rayon de convergence $R \geq 1/2$ et que si $R = 1/2$ alors $1 \in \mathrm{Sing}(S)$.
2. Montrer que $\frac{f^{(p)}(1/2)}{p!} = \sum_{n=p}^{\infty} \binom{n}{p} a_n (1/2)^{n-p}$.
3. Montrer que si $\frac{1}{2} \leq x < R + 1/2$ alors $g(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et conclure.

Solution :

Q.1 : g est a série de Taylor de f au point $\frac{1}{2}$, donc $f = g$ sur un disque centré en $\frac{1}{2}$, le rayon R de ce disque est au moins égal $d(\frac{1}{2}, bD) = \frac{1}{2}$. Maintenant, si $R = \frac{1}{2}$, Montrons que 1 est singulier pour f.
Par l'absurde, si tel n'était pas le cas il existerait un voisinage autour de 1, V_1 tel que f y soit prolongeable. Or, l'ouvert $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup V_1$ est connexe, et $g = f$ sur $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap V_1$. Donc

par le principe du prolongement analytique, g prolonge f sur $D(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \cup V_1$*, donc* $R > \frac{1}{2}$ *: Absurde* ↯

Q.2 : On a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$*, donc :*

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(p)}(z)}{p!} &= \frac{1}{p!}\sum_{p\geq n}^{\infty} n(n-1)...(n-p)a_n z^{n-p} \\
&= \frac{1}{p!}\sum_{p\geq n}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z^{n-p} \\
&= \sum_{p\geq n}^{\infty} \binom{n}{p} a_n z^{n-p}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Q.3 :

D'après la question précédente, on a :

$$g(x) = \sum_{p\geqslant 0}\left(\sum_{n\geqslant p}\binom{n}{p} a_n (1/2)^{n-p}\right)(x-1/2)^p$$

Cette somme converge, et les termes sont positifs, donc par Fubini :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n\geqslant p}\left(\sum_{p\geqslant 0}\binom{n}{p} a_n (1/2)^{n-p}(x-1/2)^p\right) \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\binom{n}{p} a_n (1/2)^{n-p}(x-1/2)^p\right) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} a_n \left(\sum_{p=0}^{+\infty}\binom{n}{p} a_n (1/2)^{n-p}(x-1/2)^p\right) \\
&= \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n
\end{aligned}$$

Donc $g(x) = f(x)$ *pour* $1/2 \geq x < R + 1/2$*.*

Si $R > 1/2$*, il existe un* $x > 1$ *tel que* S *converge et donc elle admet un rayon de convergence strictement supérieur à 1 : absurde* ↯

Donc $R = 1/2$ *et* $1 \in Sing(S)$*.*

Exercice 6 (Un exemple de série lacunaire) Montrer que la série $S = \sum_{n\geq 0} z^{n!}$ est de rayon de convergence égal à 1 et que $\partial D = \mathrm{Sing}(S)$.

Indication : considérer $S(\eta_0 e^{i\frac{p}{q}z})$ *où* $\eta_0 \in \mathrm{Sing}(S)$ *et* p/q *est rationnel.*

<u>Solution :</u>

Dans un premier temps, remarquons que pour $z = 1$*,* S *diverge grossièrement, puis pour* $|z| < 1$*,* $|z^{n!}| \leqslant |z|^n$ *et donc* S *converge. Donc* S *a un rayon de convergence de 1.*

Montrons à présent que Sing(S) = b_D.
Comme Sing(S) n'est jamais vide, il existe $\eta_0 \in b_D \cap$ Sing(S). On peut par ailleurs, quitte à remplacer S par $\sum_{n\geq 0}(\eta_0 z)^{n!}$, supposer que $\eta_0 = 1$. Montrons à présent que $e^{i\pi\frac{p}{q}} \in$ Sing(S) pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
Si $n \leqslant q$ alors $(e^{i\pi\frac{p}{q}})^{n!} = e^{i\pi\frac{pn!}{q}} = 1$.
Puis, considérons $\tilde{S}(z) = S(e^{i\pi\frac{p}{q}}z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(e^{i\pi\frac{p}{q}}z)^{n!} = \sum_{n=0}^{q-1}(e^{i\pi\frac{p}{q}}z)^{n!} + \sum_{n\leqslant q}^{+\infty} z^{n!}$
Le premier terme est un polynôme donc holomorphe sur $\mathbb{C}$, tandis que le second admet 1 comme point singulier par hypothèse, donc $\tilde{S}$ admet aussi 1 comme point singulier. Donc $e^{i\pi\frac{p}{q}}$ est un point singulier de S. Puis, on peut conclure par densité des complexes d'argument rationnel sur le cercle unité.

Exercice 7 (Séries lacunaires de Hadamard) Soit $(p_n)_{n\geq 0}$ une suite d'entiers telle que $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geq c > 1$. On considère la série entière $S = \sum_{n\geq 0} z^{p_n}$. On note f la somme de S dans le disque unité D. Le but est de montrer que $\mathrm{Sing}(S) = \partial D$.

1. Montrer que le rayon de convergence de S est égal à 1.
2. Montrer qu'il existe un entier M tel que $Mp_{n+1} > (M+1)p_n$ pour tout entier $n \geq 0$.
3. Soit $e^{i\theta} \in \partial D$ fixé et soit Q le polynôme défini par $Q(X) = \frac{e^{i\theta}}{2}\left((e^{-i\theta}X)^{M+1} + (e^{-i\theta}X)^M\right)$. Montrer que $|Q(z)| < 1$ si $z \in D \setminus \{e^{i\theta}\}$.
4. On note F la fonction définie sur D par $F(z) = f(Q(z))$, et F_0 celle définie par $F_0(z) = f(e^{-i\theta}Q(z))$.
   Montrer qu'il existe des séries entières $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_{n,0} z^n$ telles que : $F(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ et $F_0(z) = \sum_{n\geq 0} b_{n,0} z^n$. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n}(e^{-i\theta}Q)^{p_k} = \sum_{m=0}^{(M+1)p_n} b_{m,0}X^m$. En déduire que le rayon de convergence des séries $\sum_{n\geq 0} b_{n,0} z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est égal à 1.
5. Montrer que si $\eta = e^{i\theta}$ est un point régulier pour S, alors F se prolonge holomorphiquement à un voisinage de D. Conclure.

Exercice 8 (Le théorème de d'Alembert) Montrer le théorème de d'Alembert à partir de celui de Liouville.

Solution :
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. Si P n'a pas de racines, alors la fonction $z \mapsto \frac{1}{P(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Elle est de plus bornée puisque $|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors, par le théorème de Liouville, cette fonction est constante, donc P aussi.

Exercice 9 (Une extension du théorème de Liouville) Soit $f \in O(\mathbb{C})$. Montrer que si $|f|^2$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{C}$ alors f est identiquement nulle.

Solution :
Soit f une telle fonction, on sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Montrons alors que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $r > 0$, on a par la formule de Cauchy :

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta$$

Donc,

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta$$

Or par Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta &\leqslant \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{2\pi} 1 \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \sqrt{2\pi} \|f\|_2 < \infty \qquad \textit{Par hypothèse} \end{aligned}$$

Donc, $|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!}{\sqrt{2\pi r^n}} \|f\|_2 \underset{|r| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où le résultat.

Exercice 10 (Deux caractérisations des polynômes) Soit $f \in O(\mathbb{C})$. Montrer que si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite, alors f est un polynôme :

1. Il existe $d > 0$ tel que : $\limsup_{|z| \to +\infty} \dfrac{|f(z)|}{|z|^d} < +\infty$.
2. $\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = +\infty$

Solution :
Q.1 : On suppose qu'il existe un entier d tel que $\limsup_{|z| \to +\infty} \frac{|f(z)|}{|z|^d} < +\infty$
Il existe $c > 0$ tel que $\limsup_{|z| \to +\infty} |\frac{f(z)}{z^d}| = c$, donc il existe $R > 0$ tel que $|z| \geqslant R \Rightarrow |\frac{f(z)}{z^d}| \leqslant 2c$.

De plus, pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Soit $r > 0$, et $|z| > r > R$:

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \mathrm{d}\theta \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \mathrm{d}\theta \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} 2c|z|^d \mathrm{d}\theta \\
&\leqslant \frac{2c}{r^n} |z|^d \\
&\leqslant \frac{2cr^d}{r^n}
\end{aligned}$$

Or, $r^{d-n} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & si\ d < n, \\ \infty & si\ d > n. \end{cases}$ Donc les a_n sont nuls pour $n > d$, d'où le résultat.
Q.2 : On suppose à présent que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |f(z)| = +\infty$;
Remarquons que si f ne s'annule pas, alors $g := \frac{1}{f}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |g(z)| = 0$
$g = 0$: absurde $\lightning$.
Essayons alors de débarrasser f de ses zéros.
f a un nombre fini de zéros, il exister un $R > 0$ tel que $f(z_0) = 0 \to z_0 \in D(0, R)$. Donc les zéros de f sont isolés dans le compact $D(0, R)$, si ils étaient en nombre infini, la suite $(z_{0_n})_{n\in\mathbb{N}}$ admettrait une valeur d'adhérence par Bolzano-Weierstrass, donc il existerait des zéros non isolés : $\lightning$
Soit $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ les zéros de f et α_i la multiplicité de z_i. Soit V_i un voisinage de z_i tel que ce soit le seul zéro dedans. Alors, sur V_i,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = (z - z_i)^{\alpha_i} g_i(z)$$

avec g_i holomorphe sur V_i et telle que $g_i(z_i) \neq 0$. Considérons alors la fonction

$$g(z) := \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{n} (z - z_i)^{\alpha_i}}$$

Cette fonction est bien holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{z_1, ..., z_n\}$.
De plus, elle est continue sur $\mathbb{C}$ puisque : :

$$\lim_{z\to z_i} g(z) = \frac{g_i(z_i)}{\prod_{k=1,k\neq i}^{n} (z_i - z_k)^{\alpha_k}}$$

Donc, g est prolongeable de manière holomorphe sur tout $\mathbb{C}$. De plus, g est non nulle donc $h := \frac{1}{g}$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$.
Posons $d = \alpha_1 + ... + \alpha_n$,

$$\limsup_{|z|\to+\infty} \frac{|h(z)|}{|z|^d} = \limsup_{|z|\to+\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} |z - z_i|^{\alpha_i}}{|z|^d} \frac{1}{|f(z)|} = 0$$

Car, $\frac{\prod_{i=1}^{n}|z-z_i|^{\alpha_i}}{|z|^d} = O(|z|^d)$*. Donc, d'après la question 1, h est polynomiale, puis par D'Alembert, elle est constante. Donc g est aussi constante. Donc f est polynomiale.*

Exercice 11 (Un calcul standard) Montrer qu'une fonction holomorphe dont le module est constant est elle-même constante.
Indication : on calculera $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial |f|^2}{\partial z}\right)$.

<u>Solution :</u>
Soit f holomorphe sur Ω non nulle et telle que $|f| = c$ sur Ω. Montrons que f est constante.
D'une part, $\frac{\partial |f|^2}{\partial \bar{z}} = 0$ *sur* Ω.
D'autre part, $\frac{\partial |f|^2}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f\bar{f}}{\partial \bar{z}} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}_{=0}\bar{f} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} f = f\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = f\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}$*. Donc* $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ *sur* Ω.
